Przykład zadania, które pokazałam Wam dziś:

DOWÓD 10 | P | Wykaż, że liczba $7^{1000} - 5 \cdot 7^{999} + 3 \cdot 7^{998}$ jest podzielna przez 17.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy wspólny czynnik 7^{998} przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, następnie wykonujemy działania w nawiasie.

$$7^{1000} - 5 \cdot 7^{999} + 3 \cdot 7^{998} = 7^{998}(7^2 - 5 \cdot 7 + 3) =$$
$$= 7^{998}(49 - 35 + 3) = 7^{998} \cdot 17 =$$

2° Liczba 7^{998} jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 17 i liczby całkowitej, zatem wyjściowa liczba jest podzielna przez 17.

$$= \underbrace{7^{998}}_{k \in \mathbb{C}} \cdot 17 = 17k$$

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA:

Wykaż, że liczba $5^{2015} + 5^{2016} + 5^{2017}$ jest podzielna przez 31.

Zadanie 28. (0–2)
Uzasadnij, że liczba $4^{12} + 4^{13} + 4^{14}$ jest podzielna przez 42.

DOWÓD 6 | P | Wykaż, że liczba $5^{2015} + 5^{2016} + 5^{2017}$ jest podzielna przez 31.

DOWÓD 44 | P | Wykaż, że liczba $5^{10} + 2 \cdot 5^9 + 5^8$ jest podzielna przez 36.

DOWÓD 45 | R | Wykaż, że wyrażenie $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3}$ jest podzielne przez 195, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$.

DOWÓD 46 | R | Uzasadnij, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej n liczba $4^{n+2} + 4 \cdot 5^{n+1} + 4^{n+1}$ jest wielokrotnością liczby 20.

Przykład zadania, którego nie robiłam z Wami

DOWÓD 7 **P** Wykaż, że suma $2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + 2015^5 + 2015^6$ jest podzielna przez 2016.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Z każdej pary dwóch kolejnych liczb wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + 2015^5 + 2015^6 =$
$= 2015(1 + 2015) + 2015^3(1 + 2015) + 2015^5(1 + 2015) =$

2° Wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 2015)$ przed nawias.

$= (1 + 2015)(2015 + 2015^3 + 2015^5) =$
$= 2016(2015 + 2015^3 + 2015^5) =$

3° Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 2016 i liczby całkowitej, czyli suma jest podzielna przez 2016.

$= 2016\underbrace{(2015 + 2015^3 + 2015^5)}_{k \in \mathbb{C}} = 2016k$

DOWÓD 8 **P** Udowodnij, że liczba $4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{79} + 4^{80}$ jest podzielna przez 20.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy wspólny czynnik z każdej pary dwóch kolejnych liczb.

$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \ldots + 4^{79} + 4^{80} =$
$= 4(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \ldots + 4^{79}(1 + 4) =$

2° Następnie jeszcze raz wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 4)$ przed nawias oraz dodatkowo z pozostałych składników liczbę 4. Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 20 i liczby całkowitej, więc wyjściowa liczba jest podzielna przez 20.

$= (1 + 4)(4 + 4^3 + \ldots + 4^{79}) = 5(4 + 4^3 + \ldots + 4^{79}) =$
$= 5 \cdot 4\underbrace{(1 + 4^2 + \ldots + 4^{78})}_{k \in \mathbb{C}} = 20k$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

DOWÓD 43 **P** Wykaż, że wyrażenie $9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{99}$ jest podzielne przez 13.

DOWÓD 41 **P** Wykaż, że suma $999 + 999^2 + 999^3 + 999^4 + 999^5 + 999^6 + 999^7 + 999^8$ jest podzielna przez 1000.

DOWÓD 42 **P** Wykaż, że wyrażenie $103 + 103^2 + 103^3 + \ldots + 103^{18}$ jest podzielne przez 10 712.